Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a IX-a
Galaţi , 01 noiembrie 2008

Clasa a XI-a

Problema 1.

a) Să se arate că $\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2^2}\cdot\cos\frac{a}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{a}{2^{n-1}}=\frac{\sin a}{2^{n-1}\cdot\sin\frac{a}{2^{n-1}}}$, $\forall n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$ şi $\forall a\in(0;\pi)$.

***

b) Să se arate că $\frac{1}{2^{n-1}\cdot\sin\frac{a}{2^{n-1}}}=\frac{\cos\frac{a}{2^{n-k+1}}\cdot\cos\frac{a}{2^{n-k+2}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{a}{2^{n-1}}}{2^{n-k}\cdot\sin\frac{a}{2^{n-k}}}$, $\forall n,k\in\mathbb{N}, 2\leq k\leq n$ şi $\forall a\in(0;\pi)$.

***

c) Se consideră şirul $(x)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1=1,\ x_{n+1}=\cos\frac{a}{2^n}\cdot x_n+\frac{\sin a}{2^n\cdot\sin\frac{a}{2^n}}$, $\forall n\geq 1$, unde $a\in(0;\pi)$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}$.

Mariana Coadă, L:21024, GM nr. 2 / 1987

Problema 2.

a) Fie M mulţimea matricelor pătratice simetrice de ordinul n ($n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$) cu proprietatea că au toate elementele egale cu 3 sau -3, iar produsul elementelor de pe diagonala principală este -3^n. Să se afle n pentru care numărul elementelor mulţimii M este mai mic decât 2008.

Oana Mădălina Jagîte, elev, Galaţi

b) Fie S_n mulţimea permutărilor de ordinul n, unde $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că:

i) $\sum\limits_{\sigma\in S_n} m(\sigma)=\frac{n!}{2}\cdot C_n^2$, $\forall n\geq 2$.

ii) $\sum\limits_{\sigma\in A_n} m(\sigma)=\sum\limits_{\sigma\in S_n-A_n} m(\sigma)=\frac{n!}{4}\cdot C_n^2$, $\forall n\geq 4$.

Florin Costache, L:401, RMG nr. 9 / 1990

Problema 3.

a) Fie $a\in(-1;+1)$. Studiaţi convergenţa şirului $(s_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general:

$s_n=a+2\cdot a^2+3\cdot a^3+\ldots+n\cdot a^n$, pentru orice $n\geq 1$.

b) Demonstraţi că pentru orice $x,y,z\in(0;1)$ cu $x+y+z=1$ avem

$$\frac{x}{(y+z)^2}+\frac{y}{(z+x)^2}+\frac{z}{(x+y)^2}\geq\frac{\sqrt{x\cdot y}}{(1-x\cdot y)^2}+\frac{\sqrt{y\cdot z}}{(1-y\cdot z)^2}+\frac{\sqrt{z\cdot x}}{(1-z\cdot x)^2}.$$

Cristinel Mortici

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore